LOGIK UND MENGENLEHRE

ÜBUNGSBLATT 1

1. Man zeige, dass $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

2. Man zeige, dass $\{\{1,2\},\{2,3\}\} \neq \{1,2,3\}$.

3. Man zeige, dass für jede Menge A gilt es:
   (a) $\emptyset \subseteq A$;
   (b) wenn $A \subseteq \emptyset$ dann $A = \emptyset$.

4. Seien $p, q \in \mathbb{R}[X]$ zwei Polynome. Man zeige, dass die Menge aller reellen Wüerzeln des Polynoms $p.q$ ist die Vereinigung der Mengen reellen Wüerzeln der Polynome p und q.

5. Sind A, B, C Mengen, so gelten:
   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
   (b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
   (c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
   (d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
   (e) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

6. Man löse die Gleichungssysteme

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases},$$

wobei A, B und C gegebene Mengen sind.

7. Man bestimme alle Teilmengen der Mengen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{1\}$, $\{1,2\}$.

8. Man beweise, dass jede Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen.

9. Gegeben sind die Relationen (A, B, R), (A, B, R_i), $i \in I$, (C, D, S) und (C, D, S_j), $j \in J$, so gelten:
   (a) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$;
   (b) $\left(\bigcup_{j \in J} S_j\right) \circ R = \bigcup_{j \in J} (S_j \circ R)$;
   (c) $S \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \bigcup_{i \in I} (S \circ R_i)$.

10. Man finde Relationen (A, B, R_i), $i = 1, 2$ und (C, D, S), so dass $S \circ (R_1 \cap R_2) \neq (S \circ R_1) \cap (S \circ R_2)$.

11. Sind (A, B, R_i), $i = 1, 2$ und (C, D, S) Relationen mit $R_1 \subseteq R_2$, so sind $R_1 \circ S \subseteq R_2 \circ S$ und $S \circ R_1 \subseteq S \circ R_2$.

12. Seien A und B endliche Mengen mit m bzw. n Elemente. Wieviele Relationen (A, B, R) existieren?

13. Für welche binäre Relationen ist die Gleichung $R^{-1} = C_{A\times B}R$ wahr?

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`